Leçon n°152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose χ_u et μ_u son polynôme caractéristique et minimal.

I/ Généralités sur les endomorphismes diagonalisables.

A/ Espaces et éléments propres. [BER]

Définition 1 : Valeur propre, vecteur propre et spectre.

Proposition 2 : Valeur propre $\Leftrightarrow$ racine de χ_u et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ est fini.

Proposition 3 : Relation multiplicité valeur propre et dimension de l'espace propre.

Lemme 4 : Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

B/ Diagonalisabilité. [BER]

Définition 5 : Endomorphisme diagonalisable.

Remarque 6 : Définition matricielle de la diagonalisabilité, si M est diagonalisable alors M contient une matrice diagonale dans sa classe de similitude.

II/ Critères de diagonalisation.

A/ Critère sur les sous-espaces propres. [BER] [G]

Théorème 7 : Lemme des noyaux.

Théorème 8 : Propriétés équivalentes de diagonalisation.

Corollaire 9 : Si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Exemple 10 : $u : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, 2x_2 + x_1, \ldots, nx_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k)$ est diagonalisable car il a n valeurs propres distinctes.

Exemple 11 : Diagonalisation des endomorphismes circulants.

Méthode 12 : Méthode générale pour diagonaliser une matrice lorsque l'on sait calculer ses valeurs propres.

Exemple 13 : Diagonalisation de $J_n = (1)$: $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X-n)$, or $\dim(E_0(J_n)) = n-1$ et $\dim(E_n(J_n)) = 1$ donc J_n est diagonalisable.

B/ Critère sur les polynômes d'endomorphismes. [BER] [CAL] [ROM]

Lemme 14 : Si λ est une valeur propre et P annule u, alors λ est racine de P.

Corollaire 15 : Les polynômes μ_u et χ_u ont les mêmes racines qui sont les valeurs propres de u.

Théorème 16 : Propriétés équivalentes de diagonalisation.

Corollaire 17 : Si F est stable par u et que u est diagonalisable, alors $u|_F$ est diagonalisable.

Développement 1

Application 18 : Dénombrement des endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{F}_q^n$.

Application 19 : Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable avec le polynôme interpolateur de Lagrange.

III/ Propriétés issues de la diagonalisation.

A/ Propriétés topologiques. [ROM] [OBJ]

On prend ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation 20 : Notation de l'ensemble des endomorphismes diagonalisables sur $\mathbb{K}$ et ceux à valeurs propres deux à deux différentes.

Théorème 21 : $D_n'(\mathbb{C})$ et $D_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D_n'(\mathbb{C})$.

Corollaire 22 : Théorème de Cayley-Hamilton, vrai pour $\mathbb{K}$ quelconque.

Définition 23 : Endomorphismes trigonalisables et notations $T_n(\mathbb{R})$.

Proposition 24 : $T_n(\mathbb{R})$ est fermé et l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$ est $T_n(\mathbb{R})$.

Proposition 25 : L'application $A \mapsto \mu_A$ n'est pas continue pour $n \geq 2$.

B/ Décomposition de Dunford. [BER]

Définition 26 : Sous-espaces caractéristiques.

Proposition 27 : Ils sont en somme directe et engendrent tout l'espace.

Lemme 28 : Les projecteurs spectraux sont des polynômes en u.

Théorème 29 : Décomposition de Dunford.

Développement 2

Proposition 30 : Décomposition de Dunford par la méthode de Newton.

C/ Codiagonalisation. [ROM] [OBJ]

Théorème 31 : Codiagonalisation simultanée.

Remarque 32 : Écriture matricielle.

Corollaire 33 : Sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$.

Corollaire 34 : Si u et v sont diagonalisables et commutent, alors $u+v$ est diagonalisable.

D/ Application aux portraits de phases. [BERT]

On se place ici dans le cas où $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Application 35 : La classification des portraits de phase du système différentiel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est mise en annexe.

IV/ Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints [ROM] [PGCD]

On suppose connu les notions d'adjoints. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u^* son adjoint et on se place ici pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 36 : Théorème spectral

Exemple 37 : Exemple de matrice symétrique qui est donc diagonalisable.

Application 38 : Matrice Hessienne et recherche d'extrema.

Références :

— [G] Gourdon Algèbre p. 161
— [OBJ] Objectif Agrégation p. 178 et p. 206
— [BER] Berhuy Algèbre le grand combat p. 941
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 682
— [BERT] Berthelin Équations différentielles p. 203
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 264
— [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 283